

## 46 碩大就是美…吃雨傘節的遊戲

在數學上，有關計算個數或比較大小的問題，除非有很好的公式可代入精確計算或比較大小，否則使用樹狀圖進行分析、歸類及統計是不得不的一種計算方式。同樣地，在兩人玩的遊戲中，人們也可以畫樹狀圖來進行模擬一番，只是比賽進行中樹狀圖只能在腦海裡想像，無法像解數學題目一樣，在紙張上畫。但是，樹狀圖也有它的缺點，當樹狀圖太過複雜（圖繁不及備載）以致於無法從中看出端倪時，樹狀圖的用處就被侷限了。也就是說，樹狀圖只是一種輔助思考的實體，隱藏在樹狀圖背後的規律才是解題的重點。我們來欣賞一道小學競賽的數學遊戲題：

---

將寫有

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10

六個數字的六枚金幣隨意的排成一列，例如

① ⑩ ③ ④ ⑦ ⑤ ⑨ ② ⑧ ⑥

接下來甲、乙輪流拿取金幣，規則如下：

- (1) 每人每次取一枚金幣，取後不放回。
- (2) 每次只能從兩頭取金幣，也就是說，夾在中間的金幣不能取。
- (3) 在五個輪迴之後，甲乙各取五枚金幣，所取五枚金幣的數字和較大者獲勝。

問：誰有必勝的策略，又這策略跟十枚金幣的排列方式有關嗎？

---

因為六枚金幣上的數字和

$$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10=55,$$

所以甲乙各取的五枚金幣中，數字和 $\geq 28$ 者勝。現在將排成直線的金幣依灰、白相間的方式塗色，也就是說從左至右把排在第一、三、五的金幣塗成灰色，排在第二、四、六的金幣塗成白色，如下圖所示：



其中灰色三枚金幣上的數字和為  $3+2+5=10$ ，而白色三枚金幣上的數字和為  $4+6+1=11$ 。如果玩者可以拿到白色三枚金幣，那麼將贏得比賽。問題是：辦得到嗎？事實上，先拿的甲可以辦得到。在第一輪時，甲取最右邊 1 號白色金幣，剩下五枚金幣如下圖：



因為頭尾都是灰色金幣，所以乙無論怎麼取都會取到灰色金幣，而且取完所剩的四枚金幣，其顏色仍是灰白相間，頭尾一灰一白，例如



或



在第二輪時，因為頭尾的金幣是一灰一白，所以甲又可以取到白色金幣，而取後頭尾又變成都是灰色金幣，即第二輪乙仍然只能取得灰色金幣。進行完第二輪之後，剩下兩枚金幣，顏色一灰一白，先玩的甲可取白色金幣，後玩的乙只能取剩下灰色金幣。從這樣的程序中，我們發現：

- (1) 先玩者一定可以取得三枚白色金幣，而後玩者只能取得三枚灰色金幣。
- (2) 同理，先玩者也可以取得三枚灰色金幣，而讓後玩者取得三枚白色金幣。

從這裡的說明知道：先玩的甲可以得到勝利，而且這個勝利的策略跟六枚金幣的排列方式無關。同樣的原理，先玩的甲也可以讓自己所取的三枚金幣的數字和較小，而讓乙取所的金幣之數字和較大。也就是說，這道遊戲的輸贏可以完全控制在先玩者身上。

補充說明的是：在這道遊戲裡，倘若先玩的甲貪小便宜，第一輪選取較大的數字 3，而不是選取 1 的話，乙只需選取數字 4 就可以贏得比賽。故在此遊戲所排列的順序下，先玩者必須選取 1 才有絕對的優勢。

收集與開發有趣的數學遊戲是一件苦差事，這道遊戲是我到嘉義東石高中演講時，林信權老師聽了我講的幾道遊戲後，忽然間想到最近學生參加競賽所做的一道數學遊戲，提供給我參考的。而那個競賽是九章文教基金會所舉辦的「2007 小學數學競賽選拔賽複賽」，原題是這樣的：

A、B 兩人玩紙牌遊戲，紙牌共 10 張，牌上分別印有數

$$1, 2, 3, \dots, 10.$$

B 將牌依任意次序在桌面上排成一列，每個人都可看到牌上的號碼。由 A 先開始輪流每人每次拿一張牌，每次只能從整列牌的兩端拿牌，直到拿光為止，所取得的牌上的數的總和較大者為贏家。請問無論 B 如何安排這些牌，無論後取牌的 B 如何取牌，A 有無必勝的策略？請詳細說明你的理由。

〔參考解答〕A 有必勝的策略。將 B 在桌面上排成一列的牌由任一端開始黑白相間塗色，然後將塗黑色的牌上的數字加起來，與塗白色的牌上的數的總和比較，則先手可取得總和較大的顏色的牌。因為牌是黑白相間塗色，開始時的兩端必定為一黑一白，先手取了一種顏色後，兩端必定同為另一種顏色，迫使後者必定要拿另一種顏色。又因為  $1+2+3+\dots+10=55$ ，所以兩人不會平手，故 A 必勝。